www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ENSAIT

ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des
Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE 1990

Epreuve de MATHEMATIQUES 1
Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

Les parties I et II du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème, on note ln, le logarithme népérien.

I

Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la suite (u_p) par la relation

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \quad \text{et on pose } U_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p .$$

1.1

1.1.1 Etablir que, pour tout entier $p \geq 1$, on a : $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

1.1.2 Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée et que $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$

1.1.3 En déduire que la série de terme général u_p converge.

On pose $\gamma = \sum_{p=1}^{\infty} u_p$. Montrer que $0 \leq \gamma \leq 1$ γ est appelée **"constante d'Euler"**.

1.2

1.2.1 Etablir que, pour tout entier $p \geq 1$, $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{p+t} dt$

et en déduire que, pour tout entier $p \geq 2$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$

1.2.2 Soit $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{2n}$

Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} et calculer, pour cette valeur de n, la valeur approchée de γ

II

Dans toute cette partie, x est un réel strictement compris entre -1 et 1.

2.1 On considère la fonction $f_x(t)$ de la variable réelle t, à valeurs réelles, périodique, de période 2π définie par : $f_x(t) = \cos xt$ si $-\pi \leq t \leq \pi$

2.1.1 Prouver que l'on peut développer $f_x(t)$ en série de Fourier et déterminer ce développement.

2.1.2 En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{n^2 - x^2}$

.../...

2.2 On considère la série de fonctions (S) de terme général $g_n(x)$ défini, pour tout entier $n \geq 1$

$$\text{par } g_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

2.2.1 Montrer que (S) est uniformément convergente. Soit $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

2.2.2 Montrer que G est continue et dérivable.

2.2.3 Calculer G' (x) et en déduire G (x)

2.3 Soit $P_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$

Montrer que $P_n(x)$ admet, lorsque n tend vers l'infini, une limite P (x) que l'on calculera.

III

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite de fonctions ($\varphi_n(x)$) de la variable réelle x, à valeurs réelles, définies pour toute valeur de x n'appartenant pas à l'ensemble des entiers strictement négatifs par

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

3.1 Soit $\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n} \varphi_k(x)$

3.1.1 Montrer que $\Phi n(x)$ admet une limite $\Phi(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

$$\text{On pose } \Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$$

3.1.2 Calculer ln $\Phi_n(1)$ et en déduire une relation simple liant $\Phi(1)$ et la constante d'Euler γ

3.2 Pour toute valeur de x n'appartenant pas à l'ensemble des entiers strictement négatifs, on définit la **fonction eulérienne** $\Gamma(x)$ par :

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \Phi(x) \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

3.2.1 Montrer que $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x$

3.2.2 Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

3.3 On suppose x strictement compris entre -1 et 1 , $x \neq 0$.

3.3.1 Calculer $\Phi(x)$ $\Phi(-x)$

3.3.2 En déduire que $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail